

Einheitensystem und Fundamentalkonstanten

Peter Kindermann

5. November 2001

Zusammenfassung

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Basiseinheiten festzulegen. Elegant und Ziel ist eine Definition der Einheiten mithilfe von Fundamentalkonstanten.

Dies ist für einige Basiseinheiten schon gelungen (m) — für andere jedoch noch nicht (z.B. kg)

Inhalt

1. Ursprüngliche Festlegungen einiger Basiseinheiten
2. Begriffe
3. Einheitensysteme
4. Das SI und seine Grundsätze
5. Zusammenhang von Basisgrößen und Fundamentalkonstanten
6. Kilogramm und Fundamentalkonstanten
7. Elektrische Größen
8. Einheiten im Alltag

„Einheitenwillkür“ heutzutage

Teams der NASA arbeiteten mit unterschiedlichen Einheitensystemen. Die einen arbeiten mit dem metrischen System (m ,s ,...), während die anderen mit englischen Maßen maßen (inch, foot, Unze, Pint, ...).

Die Folge war der Absturz der 125 Mio Dollar teuren Mars-Mission („Climate Orbiter“)

Der Sprecher der NASA: „Menschen machen manchmal Fehler.“

Fazit: Selbst heute ist offenbar keine Vereinheitlichung der Maßsysteme erreicht.

Ursprüngliche Festlegungen der Basiseinheiten

Ursprünglich wurde schon Ende des 18. Jahrhunderts über die Einführung des Meters nachgedacht. Erst nach der französischen Revolution wurden der Meter und das Kilogramm eingeführt. Bis dahin waren Maßeinheiten von Landstrich zu Landstrich unterschiedlich.

Die neu geschaffenen Einheiten **sollten allen Menschen der Erde zugänglich sein**.

Deshalb wurden die Werte (soweit es ging) den Ausmaßen der Erde entnommen. Es zeigte sich jedoch, dass diese Festlegungen für die heutige Praxis **zu ungenau** waren.

Seitdem ist man für alle „wichtigen“ Einheiten auf der Suche nach einer **Neudefinition auf der Basis von „Naturkonstanten“**.

Ursprüngliche Festlegungen der Sekunde

- **ursprünglich:** $1 \text{ s} = \frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 24} = \frac{1}{86400}$ eines mittl. Sonnentages (Allen Menschen gleich zugänglich!)
 - Problem: periodische Schwankungen des Sonnentages:
 - * einige ms pro Tag
 - * ungleichmäßige Bahngeschwindigkeit wegen ellipt. Umlaufbahn
 - * Meteorologische Einflüsse
 - * Erdbeben
- **ab 1960:** $1 \text{ s} = \frac{1}{31\,556\,925,975}$ · Dauer des tropischen Jahres 1900
- **heute:**

1 s ist das Zeitintervall, während dessen die Cäsiumuhr 9 192 631 779,0 Schwingungen macht.

Ursprüngliche Festlegungen des Meters

- **ursprünglich¹**: Festlegung über einen Bruchteil des Erdumfangs (Allen Menschen gleich zugänglich!)
- Stab aus Platin-Iridium-Legierung mit zwei eingeritzten Marken ($1 \text{ m} = \frac{1}{10\,000\,000}$ eines Erdquadranten)
- Vergleich mit diesem Prototyp ist auf etwa 10^{-6} möglich. (Für heutige Ansprüche zu wenig!)
- **ab 1960**: Definition über Wellenlänge der orangen Fluoreszenzlinie des Krypton-Isotops 86
- **seit 1983**: Rückführung auf Zeitmessung:

1 m ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während des Zeitintervalls ($\frac{1}{299\,792\,458} \text{ s}$) durchläuft.

- Damit wurde die Lichtgeschwindigkeit im festgelegt. (Gewichteter Mittelwert der genauesten Messungen)

¹1889

Festlegung des Kilogramms

Ursprünglich¹ und noch immer gültig:

1 kg ist die Masse eines Platin-Iridium-Zylinders, der als Massennormal in Paris aufbewahrt wird.

Das sollte ursprünglich exakt die Masse von 1 dm³ Wasser bei 4 °C sein.

Genauere spätere Messungen ergaben, dass 1 dm³ Wasser 0,028 g weniger wiegt als dieses Normal. ☹

Es wird vermutet, dass sich die **Masse des Urkilogramms** in den letzten hundert Jahren **um etwa 50 µg vergrößert** hat. ☹

¹1889

Die Erde als Naturkonstante?

Maxwell (1831 - 1879):

Wenn wir also absolut unveränderliche Einheiten der Länge, der Zeit und der Masse schaffen wollen, so müssen wir diese nicht in den Abmessungen, in der Bewegung und in der Masse unseres Planeten suchen, sondern in der Wellenlänge, der Frequenz und der Masse der unvergänglichen und vollkommen gleichartigen Atome.

Begriffe

- **Merkmal (Größe):** Z.B. Farbe, Länge, Masse
- **Merkmalswert (Größenwert):** am Messobjekt vorliegende Ausprägung eines Merkmals (z.B. Längenwert)
- **Referenzgrößenwert (Einheit):** beliebig gewählter Merkmalswert (z.B. Längenwert eines Bleistifts¹)
- **Maßeinheit:** vereinbarter pos. Größenwert einer Größe, der als Referenzgrößenwert verwendet werden soll
(*Möglichst geschickt wählen!*)
- **Physikalische Größe:** Wenn Merkmalswert X mit Merkmalswert Y desselben Merkmals in Verhältnis gesetzt werden kann und $\frac{X}{Y} = \lambda \in \mathbb{R}$, dann ist das Merkmal eine phys. Größe

¹UGS: Länge statt Längenwert

- **Dimension einer phys. Größe:** Darstellung als Produkt von Basisgrößen
- **Messen:** theoretische Überlegungen und experimentelle Tätigkeiten, die zum multiplikativen Vergleich zweier Größenwerte notwendig sind
- **Einheitenzeichen:** wird zu jeder Einheit vereinbart
- **Größengleichung:** Gilt unabhängig von gewählten Einheiten; ist einer Zahlenwertgleichung vorzuziehen

Einheitensysteme

Festlegung der Basiseinheiten (auf die alle anderen Größen zurückgeführt werden sollen)

- **cgs:** Es können alle Größen auf cm, g, s zurückgeführt werden
- **MKSA:** Es können alle Größen auf m, kg, s, A zurückgeführt werden
- **SI:** Es können alle Größen auf m, kg, s, A, K, cd, mol zurückgeführt werden

Es ist zweckmäßig, **möglichst viele** Basiseinheiten festzulegen.

Man ist aber bestrebt, **möglichst wenig** Basiseinheiten definieren zu müssen.

SI

Die **7 Basiseinheiten** sind unabhängig und können nicht durch ein Produkt der anderen dargestellt werden.

Die Wahl der Basiseinheiten kann abgeändert werden.

1971 wurde das mol erst in das SI aufgenommen.

In der Schule benutzt man oft ein anderes Einheitensystem. Z.B. nimmt man **Kraft** oft als Basisgröße, denn Kraft als abgeleitete Größe von Beschleunigung ist komplizierter und künstlich.

Grundsatz des SI

Ziel ist eine **Trennung** von *Definition* und *experimenteller Realisierung* einer Basiseinheit.

(Also keine Definition durch Prototypen!)

Vorteile:

- eine Einheit kann grundsätzlich auf unterschiedliche Weise realisiert werden 😊
- eine zeitliche Veränderung der Prototypen wäre ja auch gar nicht auszuschließen 😞
- begleitet den wissenschaftlichen Fortschritt 😊

Nachteil:

- Man weiß letzten Endes nicht, inwieweit man das realisiert hat, was man wollte 😞

Zusammenhang von Basisgrößen und Fundamentalkonstanten

Fundamentalkonstanten: Invarianten, die in den grundlegenden physikalischen Theorien auftauchen

(Bsp!e: Lichtgeschw. in Vakuum, Planck-Konstante, Boltzmann-Konstante, Gravitationskonstante)

Eine Einheit wird mittels einer Fundamentalkonstanten definiert, indem man den Zahlenwert dieser Konstanten festlegt.

Bspl.: 1 m ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während des Zeitintervalls $(\frac{1}{299\,792\,458} \text{ s})$ durchläuft.

Damit ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum festgelegt.

(Woher wissen wir eigentlich, dass die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum **immer** gleich groß ist?)

Wieso gibt es überhaupt noch den Prototypen „Urkilogramm“ ?

... weil es den Grundsatz der Kontinuität gibt:

Kontinuität der Einheiten: Zum Zeitpunkt der Änderung der Definition darf man keinen Unterschied zwischen neuer und alter Einheit feststellen!

Heutige Wägetechnik: Zwei Massen (1 kg) sind auf $10\text{ }\mu\text{g}$ messbar (rel. Messunsicherheit: 10^{-8}).

Wenn eine Einheit durch Festlegung einer Fundamentalkonstanten definiert werden soll, muss diese **Fundamentalkonstante auch mit entsprechender Genauigkeit bekannt** sein.

Das ist doch ein Leichtes. Oder?

Die Gravitationskonstante

Neben c eine der am weitesten zurückreichende Mess-Geschichte.

Verschiedene Messprinzipien:

- **Messprinzip von Cavendish¹:** Zwei große Wolframkugeln wurde in die Nähe zweier Hanteln gebracht. Dadurch verlangsamte sich deren Rotation (um Sekundenbruchteile!).
- **Quecksilber statt Faden:** Körper auf Quecksilber statt an Faden (größere Hantelmasse möglich). Braunschweig
- **Stausee:** Gravitationswirkung von Wasser in einem Stausee auf 2 Proben, die sich ober- und unterhalb des Wasserspiegels befinden.

¹1731-1810

Probleme bei Bestimmung von G

In den letzten 200 Jahren konnte der Wert für G **nur um zwei Größenordnungen verbessert** werden.

$$G = 6,673(010)10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^1$$

Probleme bei der Messung von G :

- Gravitation ist sehr schwache Wechselwirkung
- Geräte sind entsprechend empfindlich auf Temperaturänderungen und Vibrationen
- lässt sich nicht abschirmen
- genaueste Kenntnis der Massenverteilung ist erforderlich
- mögliche Inelastizität des Aufhängefadens
- es gibt keinen theoretischen Vergleichswert²

¹Cavendish: $G = 6,75410^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}$

²wahrscheinlich erst bei Vereinheitlichung der 4 Grundkräfte

Definition des Kilogramms

Möglichkeiten der Definition des Kilogramms ohne G

- **Über Avogadro-Konstante:** N_A soll mit Messgenauigkeit von etwa 10^{-8} bestimmt werden ($28 \times$ genauer als jetzt!; gewaltige, bisher nicht gelöste Aufgabe)
- **Über Planck-Konstante (Wattwaage):**
- **Über Trägheit:** Schwingungsdauer eines Federpendels hängt von Masse ab. Also Rückführung auf Zeitmessung(!)
- **Silizium-Einkristall:** Atomabstände sind genau bestimmbar; Anzahl der Si-Atome im Kristall bestimmbar; Also Rückführung auf atomare Masseneinheit

Fazit: Wenn man eine geeignete Fundamentalkonstante mit der Genauigkeit 10^{-8} kennt, sollte man das Kilogramm definieren, denn höhere Genauigkeit gibt die Kilogrammdefinition nicht her. (Prozesse an der Oberfläche der Platin-Iridium-Legierung)

Strom, Temperatur, Lichtstärke und Fundamentalkonstanten

- **Ampère:** Festlegung der magnetischen Feldkonstante μ_0
- **Kelvin und Candela:** Evtl. über
 - Universelle Gaskonstante R
 - Boltzmann-Konstante k
 - Stefan-Boltzmann-Konstante σ
 - (alle sind bisher noch nicht in genügend hoher Genauigkeit bekannt)

Elektrische Größen

Bis 1989 galten sieben $1\ \Omega$ -Normalwiderstände als Widerstandsnorm.

Seit 1990 baut man auf die **Quanteneffekte** *Quantenhalbleiter* (QHE) und *Josephson-Effekt*.

Vorteil:

- beide Effekte treten bei tiefsten Temperaturen und hohen Magnetfeldern auf
- Experimente sind hervorragend reproduzierbar
- Effekte zeigen von Labor zu Labor kaum Streuung
- theoretischer Zusammenhang mit e und h

Umgang mit Einheiten im Alltag

Formal:

Messgröße (phys. Größe) = Maßzahl (Zahlenwert) · Einheit

$$G = \{G\} \cdot [G]$$

Unterschiedliche Einheiten lassen sich nur multiplizieren, dividieren und potenzieren. Sie können nicht addiert, subtrahiert und logarithmiert werden.

Abgeleitete SI-Einheiten sind **kohärent**¹ :

- $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$
- $1 \text{ N} = 1 \text{ kgm/s}^2$

Keine abgeleiteten SI-Einheiten:

- $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
- $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

¹d.h. sie haben den Zahlenfaktor 1

Dimensionsprobe

Kann die Formel $s = \frac{1}{2}at^2 + v \cdot t$ stimmen?

$$[l] = \left[\frac{l}{t^2} \cdot t^2 \right] + \left[\frac{l}{t} \cdot t \right] = [l] + [l] = [l]$$



Formeln erraten: Fadenpendel

$$t(m, l, g) \sim m^\alpha \cdot l^\beta \cdot g^\gamma.$$

Einheitenzeichen: $[s]=m$

- senkrechte Typen
- kein Plural
- keine Abkürzungspunkte
- i.d.R. Kleinbuchstaben
- Großbuchstabe, wenn von Name abgeleitet; K, N, Ausnahme: L

Formelzeichen für **physikalische Größe**:

- kursiv
- einzelne Buchstaben

☹ falsch	☹ falsch	☹ falsch	☺ richtig	☺ richtig	☺ richtig	☺ richtig	☺ richtig
U[V]	U [V]	U in [V]	U	U/V	U in V	E/ (V/m)	E in V/m
0,1	0,1	0,1	0,1 V	0,1	0,1	0,1	0,1
0,2	0,2	0,2	0,2 V	0,2	0,2	0,2	0,2
...

Tabelle 1: Umgang mit Einheiten in Tabellen

